

«Мир информатики»

Журнал для тех, у кого информатика – любимый школьный предмет

Выпуск № 37, сентябрь 2019 г.

011000100010101001001111100100011001001000101001001001011

ЕГЭ

О заданиях 11 ЕГЭ по информатике

Д.М. Златопольский

В Спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2019 году Единого государственного экзамена по информатике и ИКТ в качестве проверяемого элемента содержания для задания 11 указывается «умение исполнить рекурсивный алгоритм».

Напомним, что «рекурсивными»¹ называют процедуры или функции, которые используют (вызывают) как вспомогательную саму себя.

В качестве примера приведем функцию для расчета факториала натурального числа n (факториал числа n , обозначаемый $n!$, равен $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$). Такую функцию можно создать, имея в виду, что $n! = (n - 1)! \times n$. На школьном алгоритмическом языке соответствующая функция имеет вид:

```
алг цел Факториал (арг цел n)
нач
    знач := Факториал(n - 1) * n          |Рекурсивный вызов функции
Факториал
    |Служебное слово знач означает "значение функции"
кон
```

На самом деле эта функция оформлена не по правилам и при выполнении программы появится сообщение об ошибке. Дело в том, что при каждом вызове вспомогательной функции (или процедуры) для нее отводится место в оперативной памяти, которое «освобождается» после завершения ее (функции/процедуры) работы. Но если во вспомогательной процедуре имеется рекурсия, то вызовы вспомогательных подпрограмм будут продолжаться до тех пор, когда место в памяти будет исчерпано. Чтобы устранить этот недостаток, необходимо так оформлять функции (процедуры), чтобы рекурсивные вызовы осуществлялись по условию, которое когда-то станет ложным. Например, для приведенной функции это условие записывает так:

```
алг цел Факториал (арг цел n)
нач
    если n > 1
    то
        |Рекурсивный вызов функции Факториал
        знач := Факториал(n - 1) * n
```

¹ От латинского *recursio* – возвращение.

```

    иначе | Известное значение
    знач := 1
  все
кон

```

ИЛИ

```

алг цел Факториал(арг цел n)
нач
  если n > 1
  то
    знач := 1
  иначе
    знач := Факториал(n - 1) * n
  все
кон

```

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, использующий рекурсию, может быть описан по-другому – с указанием двух или более вариантов значения, например, в виде:

```

F(1) = 10
F(n) = F(n - 1) + 3 при n > 1

```

ИЛИ

```

F(1) = 10
F(n) = F(n - 1) + 3 при n > 1
F(n) = 0 при n < 1

```

ИЛИ

```

F(12) = 5
F(n) = F(n + 1) - 1 при n < 12

```

ИЛИ

```

F(n) = 25 при n > 12
F(12) = 5
F(n) = F(n + 1) - 1 при n < 12

```

и т. п.

Видно, что в двух первых случаях рекурсивные вызовы осуществляются с меньшими значениями аргумента, в остальных – с большими. Во всех случаях когда-то рекурсивные вызовы прекратятся (убедитесь в этом!) и начнется передача результатов в «вызывающую» функцию.

Пример работы программы при вычислении значения факториала числа 4 показан на рис. 1–2.

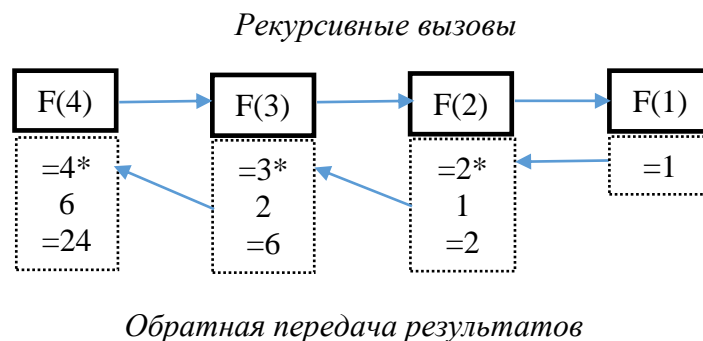


Рис. 1

F (n)	F (4) →	F (3) →	F (2) →	F (1)
Значение функции	24 ← 4 × 6	6 ← 3 × 2	2 ← 2 × 1	1
n	4	3	2	1

Рис. 2

Ответ: 24.

Как правило, задания 11 ЕГЭ рекомендуют выполнять, используя (в том или ином виде) дерево вызовов. Имеется также оригинальный метод, который я хочу описать. К сожалению, нам не удалось установить, кто его автор.

Опишем его на примере задания из демонстрационного варианта экзамена 2019 года.

Условие

Ниже записан рекурсивный алгоритм F.

Алгоритмический язык	Паскаль
алг F(цел n) нач если n > 0 то F(n - 1) вывод n F(n - 2) все кон	procedure F(n: integer); begin if n > 0 then begin F(n - 1); write(n); F(n - 2) end end;

Запишите подряд без пробелов и разделителей все числа, которые будут напечатаны на экране при выполнении вызова F(4). Числа должны быть записаны в том же порядке, в котором они выводятся на экран.

Методика решения

1. Составляется таблица, иллюстрирующая работу вызова функции F(4) (сначала для большей ясности приводим её несколько громоздкой):

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2)	3	F(1)	
F(2)	F(1)	2	F(0)	
F(1)	F(0)	1	F(-1)	
F(0)	—	—	—	

Видно, что вызываемые функции не рисуются, а «выписываются».

2. Заполняется последний столбец последнего «сработавшего» вызова (F(1)):

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается Функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2)	3	F(1)	
F(2)	F(1)	2	F(0)	
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

(Конечно, заполняется всё та же таблица.)

3. Заполняется последний столбец предпоследнего вызова с использованием уже известного результата вызова функции F(1):

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2)	3	F(1)	
F(2)	F(1) 1	2	F(0)	12
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

Можно результат вызова функции F(1) записывать сразу в последний столбец (не записывая его во второй).

4. Заполняется следующая (при просмотре снизу вверх) строка:

Функция F(n)	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3)	4	F(2)	
F(3)	F(2) 12	3	F(1) 1	1231
F(2)	F(1) 1	2	F(0)	12
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

5. И ещё одна:

Функция F	Вызывается функция	На экран выводится	Вызывается функция	Общий результат выполнения
F(4)	F(3) 1231	4	F(2) 12	1231412
F(3)	F(2) 12	3	F(1) 1	1231
F(2)	F(1) 1	2	F(0)	12
F(1)	F(0)	1	F(-1)	1
F(0)	—	—	—	—

Итак, ответ: 1231412.

Задание 11 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2018 года

Условие

Ниже на двух языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Алгоритмический язык	Паскаль
<pre> алг F(цел n) нач если n > 0 то вывод n, нс F(n - 3) F(div(n, 3)) все кон </pre>	<pre> procedure F(n: integer); begin if n > 0 then begin writeln(n); F(n - 3); F(n div 3) end end; </pre>

Запишите подряд без пробелов и разделителей все числа, которые будут напечатаны на экране при выполнении вызова F(9). Числа должны быть записаны в том же порядке, в котором они выводятся на экран.

Решение

Таблица для получения ответа имеет вид (здесь полезно предусмотреть столбец со значениями n):

n	Функция F	На экран выводится	Вызывается функция $F(n - 3)$	Вызывается функция $F(n \text{ div } 3)$	Общий результат выполнения
9	F(9)	9	F(6)	F(3)	9631231
8	F(8)	8			
7	F(7)	7			
6	F(6)	6	F(3)	F(2)	6312
5	F(5)	5			
4	F(4)	4			
3	F(3)	3	F(0)	F(1)	31
2	F(2)	2	F(-1)	F(0)	2
1	F(1)	1	F(-2)	F(0)	1
0	F(0)	–	–	–	

Ответ: 9631231.

Примечание. Строки для значений n , равных, 8, 7, 5 и 4, можно не заполнять.

Если в условии задания требуется определить сумму напечатанных на экране чисел или общее количество напечатанных на экране символов (например, “*”), то после аналогичного заполнения таблицы находится соответствующая сумма.

Задание 11 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2014 года

Условие

Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(1) = 1 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = F(n - 1) + 2 \times F(n - 2) \text{ при } n > 2$$

Чему равно значение функции $F(7)$?

В ответе запишите только натуральное число.

Решение

n	Функция F	Вызывается функция $F(n - 1)$	Вызывается функция $F(n - 2)$	Результат выполнения
7	F(7)	F(6) 21	F(5) 11	$21 + 11 \times 2 = 43$
6	F(6)	F(5) 11	F(4) 5	$11 + 2 \times 5 = 21$
5	F(5)	F(4) 5	F(3) 3	$5 + 2 \times 3 = 11$
4	F(4)	F(3) 3	F(2) 1	$3 + 2 \times 1 = 5$
3	F(3)	F(2) 1	F(1) 1	$1 + 2 \times 1 = 3$
2	F(2)			1
1	F(1)			1

Ответ: 43.

Задание 11 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2016 года

Условие

Ниже на двух языках программирования записаны две рекурсивные функции² (процедуры): F и G.

Алгоритмический язык	Паскаль
<pre> алг F(цел n) нач если n > 0 то G(n - 1) все кон алг G(цел n) нач вывод "*" если n > 1 то F(n - 3) все кон </pre>	<pre> procedure F(n: integer); begin if n > 0 then G(n - 1) end; procedure G(n: integer); begin write('*'); if n > 1 then F(n - 3) end; </pre>

Сколько символов «звездочка» будет напечатано на экране при выполнении вызова F(11)?

Решение

Здесь в задании фигурируют две процедуры (функции), поэтому составляются две таблицы:

<i>n</i>	Функция F	Вызывается функция G(<i>n</i> - 1)	Функция G	На экран выводится (количество символов)	Вызывается функция F(<i>n</i> - 3)	Общее количество выведенных символов
11	F(11)	G(10)				
10	F(10)		G(10)	1	F(7)	2 + 1 = 3
9	F(9)		G(9)			
8	F(8)		G(8)			
7	F(7)	G(6)	G(7)			
6	F(6)		G(6)	1	F(3)	1 + 1 = 2
5	F(5)		G(5)			
4	F(4)		G(4)			
3	F(3)		G(3)			
2	F(2)	G(2)	G(2)	1	F(-1)	1
1	F(1)		G(1)	—	—	—
0	F(0)	—				

Ответ: 3.

² Так в условии, поскольку там используются и другие языки программирования. Заметим также, что каждая из функций/процедур вызывает себя не непосредственно, а через вызов другой. Такая рекурсия называется «косвенной».

Задания для самостоятельной работы

1³. Ниже на двух языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг F(цел n) нач если n > 2 то вывод n, нс F(n - 3) F(n - 4) все кон</pre>	<pre>procedure F(n: integer); begin if n > 2 then begin writeln(n); F(n - 3); F(n - 4); end end;</pre>

Чему равна сумма напечатанных на экране чисел при выполнении вызова F(10)?

2. Алгоритм вычисления значения функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(1) = 2 \text{ при } n \leq 2;$$

$$F(n) = 3 \times F(n - 1) + F(n - 2) \text{ при } n > 2$$

Чему равно значение функции F(8)?

В ответе запишите только натуральное число.

3. Ниже на двух языках программирования записаны две рекурсивные процедуры: F и G.

Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг F(цел n) нач вывод "***" если n < 5 то G(n - 1) все кон алг G(цел n) нач если n < 4 то F(n + 2) все кон</pre>	<pre>procedure F(n: integer); begin write('***'); if n < 5 then G(n - 1); end; procedure G(n: integer); begin if n < 4 then F(n + 2); end;</pre>

Сколько символов «звездочка» будет напечатано на экране при выполнении вызова F(2).

Ответы присылайте в редакцию.

³ Задание из демонстрационного варианта ЕГЭ 2017 года.

Симфония фракталов

А.И. Азевич,
Москва

Кто хотя бы раз видел фракталы — удивительно красивые и таинственные геометрические объекты — тот надолго заболел этим интересным и захватывающим научным явлением. Фрактальные рисунки — вершина вдохновения мастера на пути к совершенному единству математики, информатики и искусства. Такими представляются фракталы, которые строят современные компьютеры.



До недавнего времени геометрические модели природных объектов изображались с помощью комбинаций простых фигур: прямых, треугольников, окружностей, сфер, многогранников. Так, например, икосаэдр⁴ передает модель вируса, круг напоминает медузу, а поворотная симметрия описывает форму морской звезды. Правда, с помощью набора этих известных фигур трудно описать более сложные природные объекты: пористые материалы, формы облаков, кроны деревьев и т.п. Современная наука не может обойтись без новых компьютерных средств. Они выводят математику на необычайно высокий уровень. Изучая фракталы, весьма трудно провести грань между математикой и информатикой — так тесно они переплелись в своем стремлении открыть уникальные модели, приближающие нас к пониманию некоторых природных процессов и явлений.

Рождение и развитие фрактальной геометрии

Понятия “фрактал” и “фрактальная геометрия” возникли 70–80 годах прошлого века. Они прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово “фрактал” происходит от латинского *fractus*, что в переводе означает *разбитый (поделенный на части)*. Оно было предложено американским математиком Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных самоподобных структур. По определению, данному Мандельбротом, “Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому”. Свойство самоподобности отражает главную особенность природных объектов, когда отдельная клетка растения или животного несет в себе полную информацию обо всем организме.

С математической точки зрения, фрактал — это, прежде всего, множество дробной размерности. Всем, кто изучает геометрию, известно, что размерность отрезка равна 1, квадрата — 2, куба и параллелепипеда — 3. Дробная размерность — основное свойство фракталов.

Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта “Фрактальная геометрия природы”. В ней использованы научные результаты

⁴ Икосаэдр — пространственная фигура, представляющая собой многогранник с 20 гранями, каждая из которых является равносторонним треугольником. — Прим. ред.

ученых, работавших в период 1875–1925 гг. в той же области. Среди них Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф. Только в наше время удалось объединить эти работы в единую систему.

Фрактальная геометрия — это революция в математике и математическом описании природы. Вот как об этом пишет сам первооткрыватель фрактальной геометрии Б.Мандельброт: “Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака — это не сферы, горы — это не конусы, линии берега — это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно”.

Новая фигура — фрактал — может выступать моделью сложных природных систем, таких, как кроны деревьев, горные хребты, береговые линии, поверхность Луны и т.д. Древовидные фракталы применяются для моделирования не только растений, но и бронхиального дерева, работы почек, кровеносной системы.

Если рассматривать фрактальные объекты в различном масштабе, то нетрудно обнаружить одни и те же основные элементы. Эти повторяющиеся закономерности определяют дробную (фрактальную) размерность необычной геометрической фигуры.

Типы фракталов и способы их построения

1. Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Они оправдывают такое название, т.к. строятся на основе алгебраических формул, иногда довольно простых.

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта (рис. 1). Алгоритм его построения достаточно прост⁵ и основан на многократном (итерационном) расчете по формуле: $Z_{i+1} = Z_i * Z_i + C$, где Z_i и C — так называемые “комплексные переменные”. Повторения выполняются для каждой точки начальной прямоугольной или квадратной области — подмножестве комплексной плоскости. В результате на плоскости образуется множество точек, которые выстраиваются в сложной закономерности.

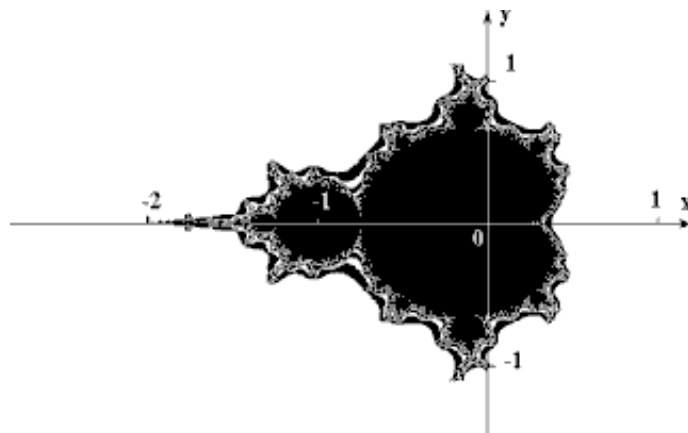


Рис. 1

Однако можно заметить, что это множество образует в разных масштабах две подобные фигуры — круг и кардиоиду. Круг — знакомая фигура. Кардиоиды — малоизвестная, поскольку не изучается в школе. Это так называемая “замечательная кривая”, которую можно построить как вручную — геометрически, так и с помощью компьютера. Если взять две окружности с равными радиусами и вращать одну по другой, то конец

⁵ Автор понимает, что читателям журнала “Мир информатики” приведенное далее разъяснение может показаться не очень понятным и предлагает в данном случае, как говорится, “поверить ему на слово”.

зафиксированного радиуса второй окружности опишет кривую, которая и носит название *кардиоиды* (рис. 2). Она получила это имя из-за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца (первая часть названия кривой — “кардио” происходит от греческого слова “кардиа”— *сердце*).

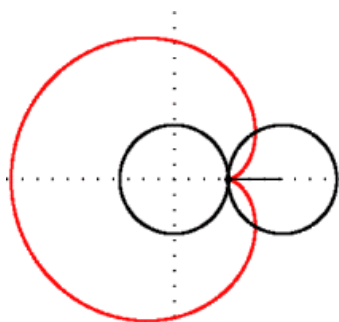


Рис. 2

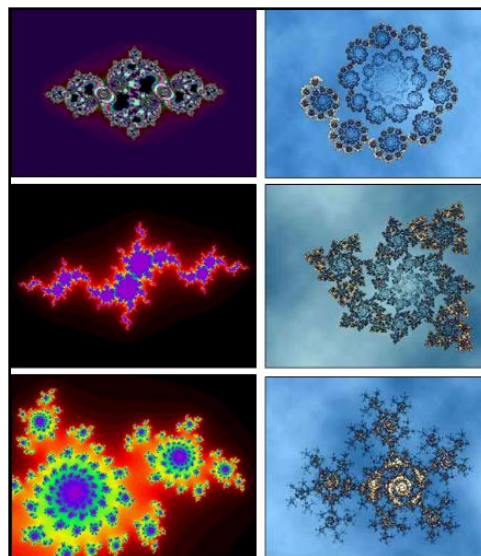


Рис. 3

Вернемся к фракталам, которые строятся по заранее определенным формулам. А как получается такое фантастическое многообразие цвета, которое мы наблюдаем во фракталах? Оказывается, для этого можно разработать компьютерные программы (правда, с достаточно сложным алгоритмом). Смена алгоритма выбора цвета порождает сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью алгоритмов описывать очень сложные геометрические структуры (рис. 3).

2. Стохастические фракталы

Фракталы, при построении которых случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. Термин “стохастичность” происходит от греческого слова, обозначающего “предположение”.

Стохастическим природным процессом является броуновское движение. С помощью компьютера такие процессы строить достаточно просто: надо просто задать последовательности случайных чисел и настроить соответствующий алгоритм. При этом получаются объекты, очень похожие на природные — несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

С помощью компьютерной программы можно построить какие-нибудь объекты живой природы, например, ветку дерева. Процесс конструирования этого геометрического фрактала задается более сложным правилом, нежели построение вышеописанных кривых.

Рассмотрим его на примере ветки. Всего лишь несколько шагов в компьютерном алгоритме... и мы видим, как образуется ветка-фрактал (рис. 4а–4в).

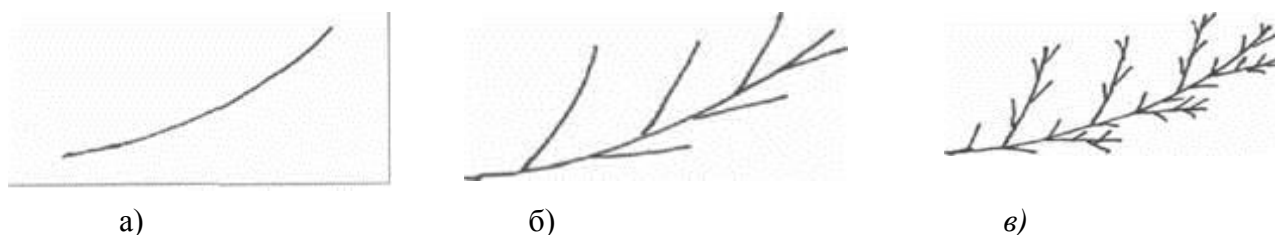


Рис. 4

3. Геометрические фракталы

История фракталов началась с геометрических фракталов, которые исследовались математиками в XIX веке. Фракталы этого класса — самые наглядные, ведь в них невооруженным глазом видна самоподобность.

В двумерном случае такие фракталы можно получить, задав некоторую ломаную, называемую *генератором*. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих эту ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал. С целью лучшего понимания этого описания рассмотрим процесс построения простейших геометрических фракталов.

Звезда⁶ Коха

Процесс построения “звезды” начинается с того, что на первом шаге стороны правильного треугольника (рис. 5а) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на правильные треугольники, подобные исходному. В результате получается правильный звездчатый шестиугольник (“звезда Давида”) (рис. 5б). Стороны этого шестиугольника вновь разбиваются на три равные части, а потом на каждом среднем отрезке стороны строятся треугольники (рис. 5в). Стоит заметить, что количество звеньев этой ломаной на каждом шаге построения соответствует членам геометрической прогрессии со знаменателем, равным $4/3$; $3 \cdot 4$, $3 \cdot 4^2$,

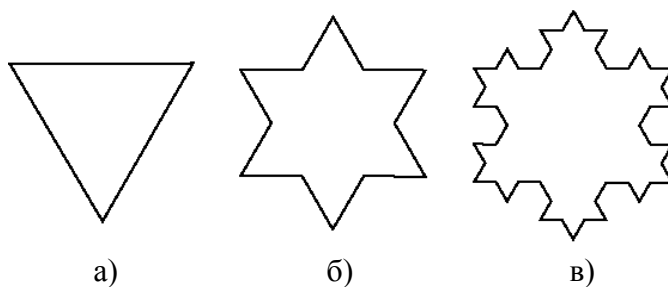


Рис. 5

Повторяя этот процесс, будем получать все более сложные многоугольники (рис. 6а, 6б), и представляющие собой звезду Коха.

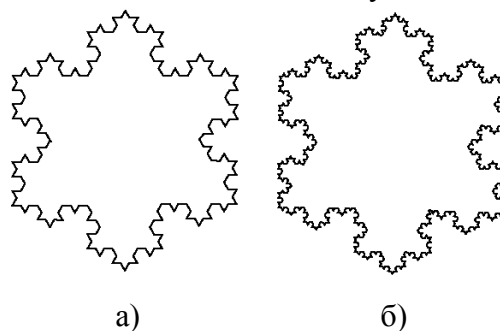


Рис. 6

С математической точки зрения, звезда Коха нигде не дифференцируема и не спрямляема (на это указывает ее “колючесть” в каждой точке). Она не имеет самопересечений.

⁶ Используется также название “снежинка Коха”. — Прим. ред.

Геометрические фракталы: список продолжается

Интересный геометрический фрактал можно построить из квадратов последовательным добавлением к исходному квадрату подобных ему фигур.

На первом шаге стороны квадрата (рис. 7а) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на квадраты, подобные исходному (рис. 7б). Стороны получившегося многоугольника снова разбиваются на три равные части и на их серединах строятся квадраты (рис. 7в).

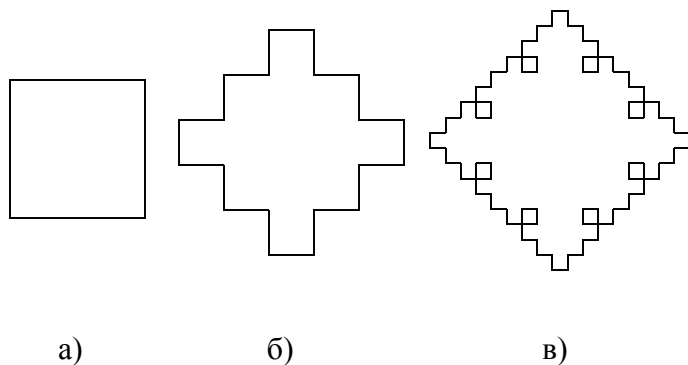


Рис. 8

Повторяя этот процесс, будем получать все более сложные фигуры, приближающиеся к искомому фракталу.

В качестве исходной геометрической фигуры можно взять не только правильный треугольник или квадрат, но и правильный шестиугольник или окружность. Применяв к ним описанное выше правило, получим еще более замысловатые и красивые фракталы (рис. 8а, б).

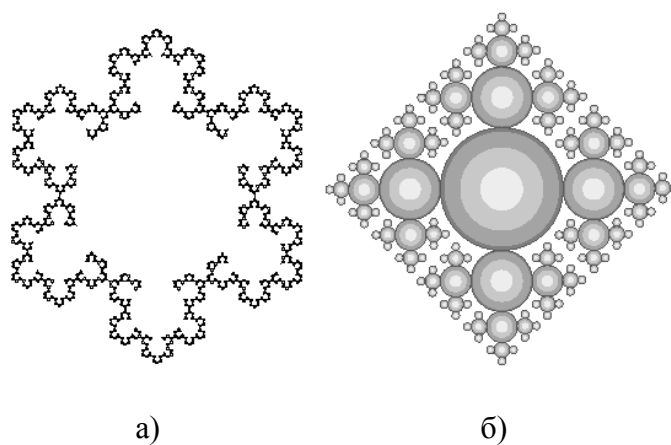


Рис. 8

Ковер Серпинского

Рассмотрим еще одну самоподобную фигуру, придуманную польским математиком Вацлавом Серпинским (1882–1969).

Она получается из квадрата последовательным вырезанием срединных квадратов. Проследим построения нового квадрата более подробно. Разделим данный квадрат на девять равных квадратов и квадрат, расположенный в середине, вырежем. Получим квадрат с пустотой (рис. 9а). Для оставшихся восьми квадратов вновь повторим указанную процедуру. Разделим каждый из них на девять равных квадратов и срединные квадраты удалим (рис. 9б). Повторяя похожие построения, будем получать все более “дырявую” фигуру (рис. 9в). То, что остается после всех вырезаний, и будет ковром Серпинского.

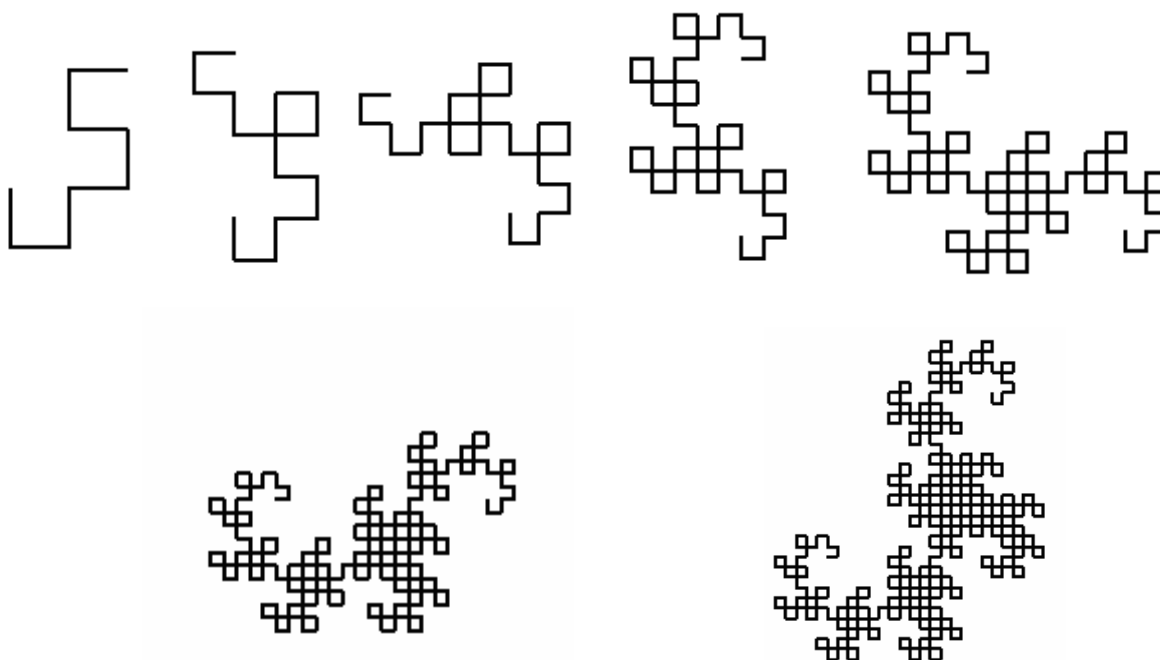


Рис. 15

Применение фракталов

Главное применение фракталов — современная компьютерная графика. С их помощью можно создавать плоские множества и поверхности очень сложной формы, посредством изменения параметров в том или ином уравнении.

Фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, морей, горных ландшафтов. Можно сказать, что ученые нашли простой способ представления сложных объектов, образы которых напоминают природные формы.

Большой вклад в теорию фракталов вносят мощные современные компьютерные программы, рисующие листья деревьев и папоротника, искусственные горные цепи, облака и не существующие в природе планеты с вымышленными океанами и континентами.

Таким образом, фракталы — это новая веха в науке XX в., с неисчерпаемой перспективой развития в веке XXI. Вот лишь несколько самых показательных примеров.

Компьютерные системы. Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. В основе этого вида сжатия лежит тот факт, что реальный мир хорошо описывается фрактальной геометрией. При этом картинки сжимаются гораздо лучше, чем это делается обычными методами. Другое преимущество фрактального сжатия состоит в том, что при увеличении картинки не наблюдается эффекта пикселизации (увеличения размеров точек до размеров, искажающих изображение). При фрактальном сжатии после увеличения картинка часто выглядит даже лучше, чем до него.

Механика жидкостей и газов. Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны, и поэтому очень сложно строить их модели. И здесь помогает переход к фрактальному представлению, что сильно облегчает работу инженерам и физикам, позволяя лучше понять динамику сложных потоков. Например, атмосфера Юпитера представляет собой одно из самых захватывающих зрелищ в Солнечной системе (рис. 16). Между ледяным холодом космического пространства и тысячеградусной жарой в глубинах атмосферного океана гигантской планеты зарождаются циклопические облачные вихри самых причудливых форм.



Рис. 16

Телекоммуникации. Для передачи данных на расстояния используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес.

Физика поверхностей. Фракталы используются для описания кривизны поверхностей. Неровная поверхность характеризуется комбинацией из двух разных фракталов.

При помощи фракталов также можно моделировать языки пламени и другие, еще более сложные, физические процессы. Фрактальные формы хорошо передают пористые материалы, которые имеют очень сложную геометрическую структуру. Это знание используется в науке о нефти.

Теория фракталов используется и при изучении структуры Вселенной.

Биология. Здесь такие примеры — биосенсорные взаимодействия и биения сердца, моделирование хаотических процессов, в частности, при описании моделей популяций. Интересным применением фракталов является генерация деревьев, как плоских, так и пространственных. Компьютерная программа, с помощью которой строятся эти фракталы, позволяет изменять различные параметры дерева: от ветвистости, толщины ствола и веток до угла наклона веток и цвета листьев (рис. 17).

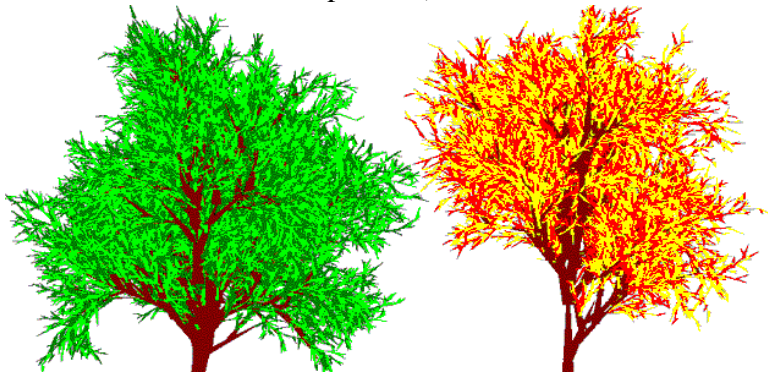


Рис. 17

Надо сказать, что природные объекты и явления, конечно, не являются фракталами в точном смысле этого слова. Однако с ассоциированными с ними фракталами можно производить точные расчеты, представляющие интерес для практики.

Фрактальное искусство. Еще одной захватывающей, но спорной областью применения фракталов служит компьютерное искусство. Фракталы не только служат ученым, но и помогают художникам передавать их мысли, чувства и настроения, воплощая самые невероятные фантазии. В наше время живописец уже не может обойтись без компьютерной программы, которая строит причудливые картины-фракталы (рис. 18).

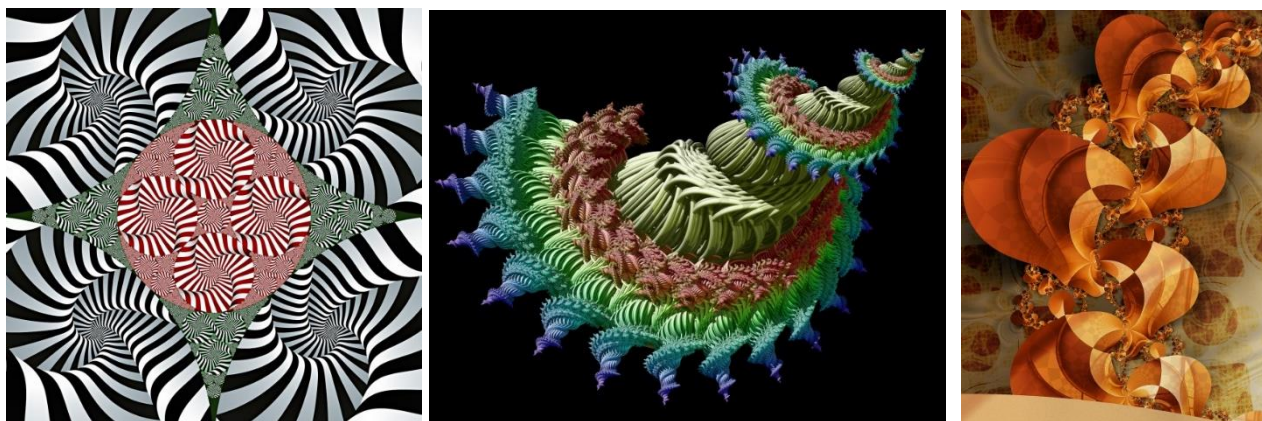


Рис. 18

Таких картин в Интернете немало. Предпринимаются попытки обоснования искусства с точки зрения фракталов.

Фракталам посвящено множество различных сайтов. Эти удивительные компьютерные объекты имеют огромный практический и художественный потенциал. Значение фракталов для науки трудно переоценить. Создание практически точных моделей окружающей среды позволит лучше изучить природу и, кроме того, оценить и сами фракталы. И, может быть, когда-нибудь на уроках информатики и математики ученики будут изучать не только треугольники, пирамиды, углы и системы счисления, но и разнообразные фракталы.

Литература

1. Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство. / Математика в школе, № 5/2005.
2. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений. / Автоматика и телемеханика. № 5/1994.
3. Витолин Д.П. Применение фракталов в машинной графике. / Computerworld–Россия, № 15/1995.
4. Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 2000.
5. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств. / Соросовский образовательный журнал, № 1/1998.
6. Диков А.В. Команды на LOGO конструируют фракталы. / Математика в школе, № 5/2005.
7. Жиков В.И. Фракталы. / Соросовский образовательный журнал, № 12/1996.
8. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – Изд-во “Постмаркет”, 2000.
9. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Изд-во “Институт компьютерных исследований”, 2002.
10. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского университета, 2004.
11. Пайттен Х.Ш., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1993.
12. Пейперт С. Переворот в сознании: дети, компьютеры и плодотворные идеи. – М.: Педагогика, 1989.
13. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
14. Шабаршин А.А. Введение во фракталы. – Екатеринбург, 1998.
15. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. – Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

Ресурсы Интернета

1. <http://fractalworld.xaos.ru/article/tree3.html>
2. <http://www.fractalartcontests.com/2007/winners.php>
3. <http://ru.wikipedia.org/wiki>
4. <http://www.fractals.nsu.ru/>
5. <http://multifractal.narod.ru/>
6. <http://fractals.narod.ru/>
7. <http://math.rice.edu/~lanius/frac/>

В санатории

В санатории на берегу моря отдыхают отец, мать сын и две дочери. До завтрака члены семьи купаются в море, причем известно, что если отец утром отправляется купаться, то с ним обязательно идут мать и сын; если сын идет купаться, то первая дочь идет с ним; вторая дочь купается тогда и только тогда, когда купается мать; каждое утро купается по крайней мере, один из родителей. Если в воскресенье утром среди купающихся членов семьи была лишь одна из дочерей, то кто в это утро ходил на море?

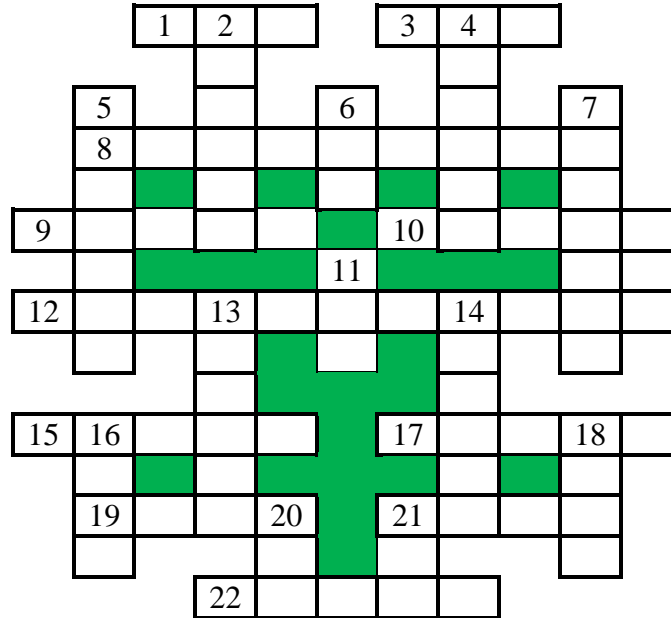
Машина времени

Однажды в 2049 году один путешественник во времени нажмет на кнопку на своей машине времени. На его цифровом дисплее покажутся цифры 1, 8, 5, 8, затем 1, 8, 5, 9, после чего – 1, 9, 0, 0. Что будет на дисплее после этого?



Кроссворд

Решите, пожалуйста, кроссворд.



По горизонтали

1. Элемент графика, строящегося с помощью электронной таблицы.
3. Характеристика файла или переменной величины.
8. Число, определяющее систему счисления.
9. Знак, обозначающий число.
10. Реакция объекта на воздействие или запрос.
12. Операция, проводимая над файлом или фрагментом текста или графического изображения.
15. Место хранения резервных копий файлов.
16. Инструмент графического редактора Microsoft Paint.
19. Непрошенное рекламное сообщение, сетевой мусор.
21. Элемент кино- или видеоряда.
22. Совокупность характеристик символа или абзаца.

По вертикали

2. Устройство для ввода информации в персональный компьютер.
4. Предмет, от которого другие предметы подвергаются действию определенной силы (соответствующее свойство используется для записи информации на носитель в персональном компьютере).
5. Стандартное устройство для вывода информации в персональном компьютере.
6. Цифра пятеричной системы счисления.
7. Арифметическая операция.
11. Число в системе условных обозначений символов.
13. Значение переменной величины или константы логического типа (русский вариант).
14. Часть света, в которой будут выпускаться компьютеры “черной сборки”.
16. Размер программиста по высоте.
18. Знак препинания.
20. Положение в компьютерной игре, имитирующей древнеиндийскую игру.
21. Жаргонное название минимальной оценки знаний.

Шесть ребусов на одну тему

Решите, пожалуйста, ряд ребусов. Определите также, с какой темой они связаны.

Ребус № 1



Ребус № 2



Ребус № 3



Ребус № 4



Ребус № 5



Ребус № 6



Иван Царевич и Кощей Бессмертный

Победив Кощея, Иван потребовал у него золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привёл его Кощей в пещеру и сказал: «В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, ты сможешь унести свою суму со слитками». Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кощей, если в сундуке исходно лежит:

- а) 13;
- б) 14 золотых слитков?

Как ему это сделать в каждом случае?

Четыре подружки

Четыре подружки – Даша, Маша, Ольга и Таня – купили подарки: блокнот, альбом, брелок и книгу. На вопрос: «Кто какие подарки купил?», – они ответили так:

- 1) Даша и Оля не знали, кто купил блокнот;
- 2) Оля сказала, что Даша и Маша вместе с ней посещали магазин, где продают брелоки;
- 3) Даша не покупала альбом.

Кто какой подарок купил?

Задача предназначена для учащихся 1–7-х классов.

*Автор задачи – Конева Ксения, ученица лицея № 41 г. Владивостока
(учитель Соловьева Е.В.)*

Два sudoku

Решите, пожалуйста, две японские головоломки “судоку”:

1) простую:

7				1	4		9	
					8		6	
3		4	5			8		
						2	3	
	7	9		5		6	4	
	1	3						
		2			3	4		9
	3		8					
	5		4	2				7

2) сложную:

5	3		4				8	
		1	5	6				
9								1
2	5	9						
4					9			8
	6	8		4		9		5
1					8			
	7						5	
8			3				4	6

Шидоку

Шидоку – вариант известной японской головоломки судоку, предназначенный для детей младшего школьного возраста. Игровое поле шидоку представляет собой квадрат размером 4×4 клетки, разделённый на 4 меньших квадрата 2×2 клетки. Используя первоначальные цифры, необходимо заполнить оставшиеся свободные клетки цифрами от 1 до 4 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом малом квадрате 2×2 каждая цифра встречалась бы только один раз.

3			
	4		1
1 2			
3 4		2	

Предлагаем учащимся 1–7-х классов решить эту головоломку.

Внимание! Конкурс!

Конкурс № 22 «Определение лишнего в наборе»

Определите лишний элемент в каждом из наборов.

- 4, 9, 16, 25, 50, 64, 81 ...
- 12, 18, 27, 45, 61, 66, 72 ...
- 22, 24, 32, 36, 40, 68, 72 ...
- 82, 37, 14, 26, 65, 12, 21 ...
- 4, 16, 9, 63, 49 ...
- 2, 5, 14, 26, 37 ...
- 1, 25, 4, 15, 36 ...
- 4, 6, 9, 73, 49 ...
- 3, 7, 11, 13, 18, 19, 25, 29 ...
- 36, 27, 11, 25, 23, 17, 15 ...
- 27, 30, 33, 24, 36, 39, 42 ...
- 31, 39, 41, 43, 47, 53, 71 ...
- 26, 35, 242, 267, 314, 422, 701 ...
- ∇, Y, P, J, X ...
- < Ω ⊂ ∇ Z ...
- %, +, H, Φ, N ...
- B, D, ⑆, 9, C ...

Ответы (можно не по всем пунктам, но с обоснованием!) присылайте в редакцию по адресу:

mirinfo@infojournal.ru

Срок представления ответов – 31 октября.