

«Мир информатики»

Журнал для тех, у кого информатика – любимый школьный предмет

Выпуск № 100, май 2025 г.

**Этот выпуск — юбилейный.
Поздравляем всех читателей!
Спасибо за Вашу активность!
Желаем всем дальнейших успехов!**

ЕГЭ

О заданиях 19-21 демонстрационных вариантов ЕГЭ по информатике

1. Общие вопросы

В Спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения ЕГЭ по информатике в качестве в 2025 году проверяемого результата обучения применительно к заданиям 19, 20 и 21 указаны следующие характеристики:

	Задание 19	Задание 20	Задание 21
Проверяемый элемент содержания	Умение анализировать алгоритм логической игры	Умение найти выигрышную стратегию игры	Умение построить дерево игры по заданному алгоритму и найти выигрышную стратегию
Уровень сложности задания	Б (базовый)	П (повышенный)	В (высокий)
Максимальный балл за выполнение задания	1	1	1
Примерное время выполнения задания, минут	6	8	11

В заданиях 19, 20 и 21, представленных в демонстрационных вариантах ЕГЭ по информатике нескольких последних лет, речь идет об игре двух участников, по очереди берущих камни по определенным правилам из одной или двух кучек камней. Игра заканчивается при наступлении некоторого заданного условия.

2. Готовимся выполнять задания

Прежде чем обсуждать методику выполнения указанных заданий, введем ряд понятий, важных для выполнения. Для этого обсудим более простую игру: «Два игрока играют в следующую игру. Они ходят по очереди, выкладывая на стол один, два или три предмета

(монеты, спички или т.п.). В начальный момент на столе предметов нет. Игра завершается в тот момент, когда общее количество предметов на столе становится не менее 15».

В каком случае делающий очередной ход игрок *A* побеждает в игре? – Если на столе уже есть 14, 13 или 12 предметов. Каждую такую позицию в игре назовем «выигрышной» (для делающего очередной ход).

Следующий вопрос: «При каком количестве предметов на столе его соперник *B* обязательно оставит ему одну из таких позиций, то есть любой его ход переведет ситуацию в игре в выигрышную позицию?» – При 11 предметах¹. Позицию с 11 предметами назовем «проигрышной».

Получается, чтобы выиграть, *A* должен оставить после своего предпоследнего хода 11 предметов. Как это можно сделать? – Из позиций с 10, 9 или 8 предметами. Понятно, что эти позиции тоже выигрышные для *A*.

А как «заставить» *B* создать оставить одну из этих позиций? Если до этого *A* оставит 7 предметов (проигрышную позицию).

Рассуждая аналогично, определим, что выигрышными для *A* являются позиции с 6, 5 или 4 предметами, а позиция с тремя предметами является проигрышной.

Итак, можно сделать такой вывод: «Чтобы выиграть, начинающий игру *A* должен оставить после своего хода проигрышную позицию с тремя камнями, после чего его соперник *B* будет вынужден оставлять после своего хода выигрышную позицию, которую *A* переведет в проигрышную и т.д. до окончания игры, в которой *A* станет победителем.

В таких случаях, когда игрок может выиграть при любых ходах соперника, говорят, что «он имеет выигрышную стратегию». Эта стратегия заключается в том, что он должен все время переводить ситуацию в игре в проигрышную позицию.

Всегда ли у начинающего игру есть выигрышная стратегия? Анализ варианта игры, в которой условием для окончания игры является «Общее количество предметов на столе становится не менее 16», показывает, что начальной проигрышной позицией является позиция «4», которую начинающий игру оставить сопернику не может. В этом случае победителем станет игрок, делающий ход вторым (конечно, если он знает выигрышную стратегию).

Итак, можно дать такие определения:

- Выигрышная позиция – в которой игрок, делающий очередной ход, может:
 - перевести ситуацию в игре в следующую такую же позицию независимо от того, какой ход сделает другой игрок,
 - или одним ходом победить в игре.
- Проигрышная позиция – в которой игрок, делающий очередной ход, при любом своем ходе переведет ситуацию в игре выигрышную для соперника позицию.

*Вопросы для самоконтроля*²

1. Если в аналогичной игре выкладывать можно один, два, три предмета или четыре предмета, и игра завершается в тот момент, когда общее количество предметов на столе становится не менее 25, то какая последняя позиция является проигрышной?

2. Если в начале игры на столе уже находятся *S* предметов, то кто выиграет – начинающий игру или делающий второй ход? Имеется в виду, что оба участника игры знают выигрышную стратегию.

И ещё. Возможен также вариант рассмотренной игры, в котором в начальный момент на столе уже находятся *S* предметов, а участники по очереди могут взять 1, 2, ..., *n* предметов. Побеждает тот, кто своим ходом взял все оставшиеся предметы (или когда количество предметов на столе становится меньше некоторого значения. Что меняется в стратегии

¹ Убедитесь в этом!

² Ответы на эти вопросы будут полезными при выполнении заданий ЕГЭ.

участников игры? По сути – ничего. Выигрышные и проигрышные позиции определяются по приведенным чуть выше особенностям.

Например, при $S = 15$, возможности взятия за один ход один, два или три предмета и при окончании игры в момент, когда все предметы разобраны, позиции 1, 2 и 3 являются выигрышными, позиция 4 – проигрышная, позиция 5, 6 и 7 – выигрышные, позиция 8 – проигрышная и т.д.

Итак, задания из демонстрационных вариантов экзамена. Будем обсуждать группу из трех заданий (19, 20 и 21) каждого года.

3. Примеры заданий с игрой с одной кучкой камней и методика их выполнения

3.1. Пример 1 (задание 19 из демонстрационных вариантов ЕГЭ 2023–2024 гг.)

Условие

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза³. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 129. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 129 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 128$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Решение

Обратим внимание на то, что в условии идет речь о выигрыше Вани за один ход, а начинает игру Петя.

Так как говорится о выигрыше за один ход, то начинать анализ надо, так сказать, «с конца». Какие позиции являются выигрышными (см. выше) за один ход? Первая очевидная выигрышная позиция для Вани – если после хода Пети в куче окажется 128 камней. А если камней будет меньше? При 127 камнях – тоже побеждает Ваня (он удвоит имеющееся количество камней). Анализ показывает, что выигрышная позиция у делающего последний ход Вани будет при количестве камней в куче от 65 до 128. При каком количестве камней его соперник Петя *обязательно* оставит ему одну из таких позиций? – При 64 (при таком количестве Петя выиграть не может, он может увеличить число камней либо до 65, либо до 128; в обоих случаях Ваня побеждает одним ходом).

Ответ: 64.

Запомним, что позиция (64) является проигрышной⁴.

3.2. Пример 2 (задание 20 из демонстрационных вариантов ЕГЭ 2023–2024 гг.)

Условие

Для игры, описанной в задании 19, найдите два наименьших значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
 - Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.
- Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

³ Для краткости такой ход иногда будем обозначать, соответственно «+1» и «×2».

⁴ О понятии «проигрышная позиция» см. раздел 2.

Решение

Здесь речь идет о выигрыше *Пети* за два хода.

При выполнении предыдущего задания было установлено, что при 64 камнях делающий очередной ход проигрывает в любом случае. Значит, в данном случае Петя, чтобы выиграть, должен свести ситуацию в игре к 64 камням в куче. Когда он может это сделать? – Если при первом ходе Пети (в начале игры) в куче находится 63 или 32 камня.

Ответ: 32 63 (в порядке возрастания!).

3.3. Пример 3 (задание 21 из демонстрационных вариантов ЕГЭ 2023–2024 гг.)

Условие

Для игры, описанной в задании 19, найдите минимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
 - у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.
- Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

Решение

Конечно, условия изложены «замысловато», поэтому прокомментируем их.

Обратим внимание на то, что начинает Петя, а речь идет о вариантах исхода игры для Вани, а также на слово «гарантированно».

Итак, в задании идет речь о поиске такой позиции, которая для Пети является проигрышной. Причем не исключены несколько таких позиций, и надо найти минимальное значение S . Так как позиции диапазона (65)–(128) являются выигрышными за один ход, то минимальное значение S , при котором Петя создаст для Вани одну из выигрышных позиций, равно 33. Но является ли такой выигрыш Вани гарантированным? – Нет, так как у Пети есть и другие варианты хода (в данном случае – другой вариант: – «+1», при котором Ваня вообще не выиграет).

Рассмотрим заведомо проигрышную позицию (уже известную) $S = 64$. В этом случае Ване *гарантирована* победа за один ход, что не соответствует второму условию задания.

Предыдущее значение $S = 63$. В этой позиции Петя тоже может перевести ситуацию в проигрышную для Вани позицию (64), то есть в этом случае Ваня не выигрывает.

А вот значение $S = 62$ удовлетворяет обоим условиям, приведенным в задании:

- если Петя переведет ее в позицию (63), то Ваня своим первым ходом «+1» сведет ее к проигрышной для Пети позиции (64), после чего выиграет вторым ходом;
- если Петя удвоит количество камней до 124, то тогда Ваня побеждает за один ход.

Ответ: 62.

Внимание! Анализ позволяет сделать важные выводы.

1. В заданиях 21, аналогичных рассмотренному (с ходами в игре « $\times n$ » при любом n и «+1»), искомым является значение, на 2 меньше количества камней, чем в проигрышной позиции, найденной при решении задания 19 при тех же условиях игры. В рассмотренном случае мы имели $62 = 64 - 2$.

2. В заданиях 21 с играми с командами « $\times n$ » (при любом n) и «+ m » (при любом m) для определения искомого значения S следует вычитать $2m$.

3.4. Пример 4 (задание 19 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2022 года)

Условие

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 29. Победителем считается

игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 29 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 28$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Решение

Здесь все рассуждения аналогичны сделанным в п. 3.1:

- выигрышные позиции: 28, 27, ..., 15 камней;
- проигрышная позиция перед ними: 14 камней.

Ответ: 14

3.5. Пример 5 (задание 20 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2022 года)

Условие

Для игры, описанной в задании 19, найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Решение

При выполнении задания 19 было установлено, что проигрышная позиция для делающего ход Вани – 14 камней.

Петя может достичь ее с позиций, когда на столе находятся 7 или 13 камней.

Ответ: 7 13.

3.6. Пример 6 (задание 21 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2022 года)

Условие

Для игры, описанной в задании 19, найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

Решение

Согласно выводу 1, сделанному в п. 3.3, искомое значение равно $14 - 2 = 12$.
(14 – проигрышная позиция.)

Ответ: 12.

3.7. Обобщения

Обсудим другой возможный вариант задания 19 – в котором, кроме добавления в кучу одного камня, за один ход игрок может увеличить количество камней в куче в *три* раза. Пусть например, игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее некоторого заданного значения *предел*. Надо указать такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Рассмотрев три варианта значения *предел*, одно из которых кратно трем, заполним таблицы выигрышными (В) и проигрышной (П) позициями:

50	51	...	151	152	153 и более
П	В	В	В	В	Конец игры

50	51	...	150	151	152 и более
П	В	В	В	В	Конец игры

50	51	...	149	150	151 и более
П	В	В	В	В	Конец игры

Анализ показывает, что искомое значение в заданиях, аналогичных рассмотренным, определяется по формуле: $\left\lfloor \frac{\text{предел}}{3} \right\rfloor$, где символы $\lfloor \rfloor$ означают целую часть частного от деления выражения, записанного между ними.

Обобщим также два рассмотренных задания 20.

Как уже говорилось, в них речь идет о выигрыше *Пети* за *два* хода, и искомые в них значения, это позиции, с которых он может создать проигрышную позицию для Вани.

Нетрудно увидеть, что искомые в них значения зависят от соответствующего искомого значения в задании 19:

- значения 32 и 63 зависят от 64;
- значения 7 и 13 зависят от 14.

В чем особенность расчетов каждой пары искомым значений установите самостоятельно.

Понятно, что если найденные при выполнении задания 19 значения нечетные (см. выше), то в соответствующем задании 20 речь может идти о поиске одного значения:

- для 63 – это значение 62;
- для 13 – это значения 12.

Для заданий, аналогичных заданию 20, но с возможностью увеличения количества камней в куче в *три* раза, логика расчетов та же. Если значение, найденное при выполнении задания 19 с теми же условиями игры, кратно трем, то в задании 20 искомыми являются два значения, в противном случае – одно.

- для 51 – это значения 17 и 50;
- для 50 – это значение 49.

3.8. Другие возможные варианты задания 19

Как уже отмечалось в пп. 3.1 и 3.4, в заданиях 19 из демонстрационных вариантов ЕГЭ 2022–2024 гг. искомым значением является количество камней в проигрышной позиции в игре.

Возможна также такая формулировка задания 19 при тех же правилах игры: «Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна». Далее задания такого типа будем называть «задания типа Б».

Решение

Здесь под словом «неудачный» ход имеется в виду, что Петя во время первого хода не применил возможную выигрышную стратегию, а перевел игру в выигрышную для Вани позицию, в результате чего тот выиграл своим первым ходом.

Выпишем последние выигрышные позиции: 128, 127, ..., 66, 65. С каких позиций к ним могли привести неудачные ходы Пети? – С позиций 64, 62, ..., 33. Минимальное значение – 33.

Ответ: 33.

Для аналогичных заданий в играх с возможностью увеличения количество камней в куче в более чем в два раза решение аналогично.

Приведем его применительно к предельному количеству камней (29) и с возможностью увеличения количество камней в *три* раза.

Последние выигрышные позиции: 28, 27, ..., 12, 11, 10. К ним могли привести неудачные ходы Пети с позиций 27, 26, ..., 9, 8, 7, 6, 5, 4.

Ответ: 4 (частное от деления на 3 минимального числа камней в выигрышных позициях, кратного трем, то есть числа 12).

Можно так сформулировать методику выполнения заданий типа Б в общем случае, когда, наряду с возможностью добавления в кучу одного камня игроки, могут увеличивать количество камней в куче в N раз.

- 1) выписать количество камней в последних выигрышных позициях в порядке убывания (одно максимальное значение и N минимальных);
- 2) в конце полученного списка найти минимальное число, кратное N ;
- 3) ответом будет частное от деления этого числа на N .

В заключение рассмотрим такую задачу «Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или пять камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 41 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 40$.

Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Решение

Видно, что отличие от рассмотренных ранее заданий 19, указанная игра отличается ходами, которые могут делать участники игры. Но решается задача аналогично.

Последние выигрышные позиции: 40, 39, ..., 36.

Позиция, в которой при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом, – 35 камней.

Ответ: 35.

Другой вариант рассмотренной задачи (аналогичен заданиям типа Б): «Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна».

Решение

При какой позиции, сделав свой первый, ошибочный, ход, Петя оставит Ване выигрышную позицию? Возможны две такие позиции:

- с 35 камнями (любой ход Пети переведет ситуацию в выигрышную позицию);
- с 31 камнем (ход Пети «+5» переведет ситуацию в выигрышную позицию с 36 камнями).

Комментарий. Ход Пети «+1» при 31 камне не является ошибочным.

Ответ: 31.

Внимание! В задачах последнего типа, в которых могут быть три и более вариантов возможных ходов с добавлением камней, следует использовать максимальное «приращение». Например, если за один ход игрок может добавить в кучу один, четыре или восемь камней, то при решении должно использоваться число 8.

И, конечно, возможен «комбинированный» вариант игры, в котором возможны два хода с добавлением камней и ход с увеличением камней в два или более раз. Рассуждения при решении всех таких задач аналогичны приведенным.

4. Примеры заданий с игрой с двумя кучками камней и методика их выполнения

4.1. Пример 1 (задание 19 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2021 года)

Условие

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 77 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче – S камней; $1 \leq S \leq 69$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна

Решение

Прежде всего, обсудим, может ли вторая куча быть меньше первой ($S < 7$)? – Нет, потому что в этом случае даже четырехкратное (за два хода) увеличение большей кучи (с семью камнями) позволит «набрать» только $7 \times 4 + 6 = 34$, что меньше 77. Значит, в начальной ситуации большей была вторая куча с S камнями.

Далее. Анализ показывает, что есть *несколько* позиций $(7, S)$, в которых после неудачного хода Петя Ваня выигрывает (об этом же говорить тот факт, что в условии фигурирует слово «минимальное»). Одной из таких позиций является, например $(7, 34)$, то есть $S = 34$, которую Петя переведет в $(7, 35)$, после чего Ваня выигрывает, увеличив вдвое число камней во второй куче $(7, 70)$.

Минимальное значение S будет в том случае, если и Петя своим первым ходом, и Ваня будут удваивать число камней в большей (второй) группе. В этом случае для выигрыша Вани должно соблюдаться условие $7 + 4S > 76$, откуда $S > 69$. Последнему неравенству соответствует минимальное целое значение S , равное 18.

Ответ: 18.

4.2. Пример 2 (задание 20 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2021 года)

Условие

Для игры, описанной в предыдущем задании, найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Решение

Так как Петя не может выиграть за один ход, то он должен этим ходом перевести ситуацию к проигрышной для Вани позиции. Как найти такую позицию или несколько таких позиций?

Точно можно сказать, что Ваня не выиграет в позициях, в которых удвоение им большей кучи даст общее число камней, равное 76. Так как бóльшая куча – вторая, то этому условию соответствуют следующие: (8, 34), (10, 33), (12, 32), (14, 31), (16, 30), (18, 29),

Но позиции без количества камней в первой куче 8 и 14 созданы быть не могут. Значит, остаются две позиции: (8, 34) и (14, 31).

Как они могут быть получены из начальной позиции (7, S), достаточно очевидно – при изменении Петей количества камней в первой куче (ходами «+1» и «×2», соответственно).

Итак, получены два значения S (34 и 31), при которых Ваня *не сможет* выиграть. Но может быть в указанных случаях и Петя *не сможет* выиграть своим *вторым* ходом, если Ваня не будет вдвое увеличивать бóльшую кучу, а сделает один из трех других возможных ходов? Проверим значение 34:

Ход Вани	Получится позиция	
«+1» в первую кучу	9, 34	Во всех случаях Петя также выигрывает, увеличив вдвое вторую кучу.
«×2» в первой куче	18, 34	
«+1» во вторую кучу	8, 35	

Аналогично можно убедиться в том, что и позиция (14, 31) является проигрышной для Вани (Петя выигрывает вторым ходом).

Значит, значения $S = 34$ и $S = 31$ обеспечивают Пете выигрыш в соответствии с условиями задания.

Ответ: 31 34 (в порядке возрастания!).

4.3. Пример 3 (задание 21 из демонстрационного варианта ЕГЭ 2021 года)

Условие

Для игры, описанной в задании 19, найдите минимальное значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Решение

Логика решения данной задачи аналогична выполнению заданию 21 с одной кучей камней (конечно, с учетом того, что в игре используются две кучи).

Еще раз обратим внимание на то, что начинает Петя, а речь идет о вариантах исхода игры для Вани.

Как и при выполнении задания с одной кучей камней, в данном случае искомое значение S должно быть таким, чтобы при любом ходе Пети Ваня выиграет игру одним или двумя ходами. Как найти такое значение (или несколько таких значений)?

Мы уже знаем, что Петя побеждал в позициях (7, 31) и (7, 34). Теперь в них должен оказаться Ваня. После каких ходов Пети?

Начнем с (7, 31). Эту позицию Петя может создать с позиции (7, 30). Ваня переведет в (14, 31), после чего выиграет своим вторым ходом.

Но у Пети есть и три других варианта хода. Какие исходы для них

Явно неудачный ход Пети по увеличению вторую кучу в два раза приведет к выигрышу Вани за один ход.

Анализ еще двух вариантов ходов Пети в позиции (7,30) приведен в таблице:

Ход Пети	Получится позиция	Петя переводит ее в в позицию	Из которой
«+1» в первую кучу	(8, 30)	(16, 30)	он выигрывает своим вторым ходом
«×2» в первой куче	(14, 30)	(14, 31)	то же

Следовательно, для исходной позиции (7, 30) требуемые условия соблюдаются.

Проверим позицию (7, 34). Ее Петя может создать своим ходом с позиции (7, 33), после чего Ваня побеждает за два хода. Анализ трех других вариантов хода Пети с позиции (7, 34), который мы предлагаем провести читателям, показывает, что позиция (7, 33) также подходит.

Минимальное из двух найденных значений $S = 30$.

Ответ: 30.

Обратим внимание на то, что если бы в задании требовалось найти максимально возможное значение S , то ответ был бы равен 33.

4. Задания для самостоятельного выполнения

1. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 43. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 43 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 42$.

А. Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Б. Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

В. Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Г. Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

2. Выполните предыдущие задания для случая, в котором игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче окажется больше 19.

3. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в 3 раза. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 129. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 129 или больше камней⁵.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 128$.

А. Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Б. Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

В. Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

⁵ Обратите внимание на то, что используется команда «×3».

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Г. Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

4. Такое же задание, как и предыдущее, но игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 100.

5. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один, четыре или 10 камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 85. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 41 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 84$.

А. Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Б. Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

В. Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;

- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Г. Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

6. Такое же задание, как и предыдущее, но игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 100.

7. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два, четыре или пять камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 85. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 85 или больше камней⁶.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 84$.

А. Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Б. Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

В. Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;

- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Г. Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

⁶ Обратите внимание на то, что минимальное приращение количества камней не равно 1.

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

8. Такое же задание, как и предыдущее, но игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 100.

9. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 45. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 45 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 44$.

А. Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Б. Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

В. Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Г. Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Если найдено несколько значений S , в ответе запишите минимальное из них.

10. Такое же задание, как и предыдущее, но игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 101.

11. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 86. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 86 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче – S камней; $1 \leq S \leq 79$.

А. Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

Б. Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

В. Найдите минимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

12. Два игрока, Петя и Ваня, играют в игру с двумя кучками, правила которой выше.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче – S камней; $1 \leq S \leq 51$.

В. Найдите максимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Книжная полка

Книга «Подготовка к успешной сдаче ЕГЭ по информатике»

Издательство «ДМК Пресс» предлагает книгу «Подготовка к успешной сдаче ЕГЭ по информатике» (<https://dmkpress.com/catalog/computer/handbooks/978-5-93700-236-5/>)

Большинство книг, связанных с Единым государственным экзаменом по информатике, представляют собой сборники заданий для самопроверки или «решебники», в которых приводится решение заданий без подробных комментариев. Данная книга отличается от них тем, что в ней после соответствующей теоретической подготовки рассказывается о типовых вариантах всех 27 заданий ЕГЭ и особенностях каждого из них, приводятся различные методы их выполнения, даются полезные советы и рекомендации, обеспечивающие ускорение выполнения заданий и уменьшающие вероятность ошибки. После знакомства с этими вопросами читатель может проверить свои знания и умения, выполнив предлагаемые в книге задания для самостоятельной работы.

В книге учтены задания из демонстрационных вариантов ЕГЭ по информатике нескольких последних лет до варианта 2024 года включительно.

При изложении методики выполнения заданий с помощью собственных программ логика действий в них описывается на школьном алгоритмическом языке (система программирования КуМир). Русский синтаксис этого языка и большое число комментариев к программам делают приводимые методики и программы максимально понятными, и читатель сможет разработать аналогичные программы на языке программирования, которым владеет.

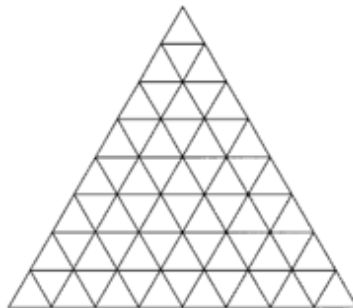
Методика выполнения заданий в среде электронной таблицы описывается применительно к программе Microsoft Excel. При использовании читателем другой программы, естественно, должны быть учтены ее особенности.

Кроме учащихся 11-го класса, готовящихся к сдаче ЕГЭ, книгу могут использовать учителя и преподаватели информатики. Конечно, она будет полезна и учащимся 9–10-х классов, планирующим сдавать экзамен в будущем.

Через сайт издательства <https://dmkpress.com/> книгу можно приобрести дешевле, чем в магазине (даже с учетом стоимости доставки). Книга предлагается также на [avito.ru](https://www.avito.ru/).

Итоги конкурса № 72 «Кто лучше считает?»

Напомним, что в качестве задания этого конкурса было предложено определить количество треугольников разного размера на следующем изображении:



Участниками конкурса стали:

– Бикетова Полина, Бреднева Ольга, Казменкова Елизавета, Колченко Алина, Крюкова Екатерина, Нестеренко Виктория и Нестерова Алиса, Барнаульский государственный педагогический колледж имени В.К. Штильке, преподаватель **Сысолятина В.А.**;

– Гиренко Артем и Юшин Никита, Иркутской обл., г. Слюдянка, школа № 2, учитель **Вознесенская М.В.**;

– Захарова Ксения, Захарова Эльвина и Хабибуллин Амир, Республика Татарстан, Мамадышский р-н, совхоз “Мамадышский”, политехнический колледж, преподаватель **Порываева Н.С.**

– Колпаков Артем Евгеньевич, Алтайский край, г. Новоалтайск, школа № 15, учитель: Волобуева И.К.;

– Лукьянов Кирилл, Барнаульский государственный педагогический колледж имени В.К. Штильке, преподаватель **Лукьянова Н.В.**;

– Мурзина Евгения, Владимирская обл. г. Струнино, школа № 11, учитель **Волков Ю.П.**;

Итого конкурса будут определены с учётом статьи в следующей рубрике. При этом редакция решила выделить абсолютных победителей конкурса и участников, занявших 2-е и 3-е места.

Ответы и решения задач и головоломок, опубликованных в журнале «Мир информатики», выпуск № 98 (март 2025 г.), прислали:

— Александрова Кристина, Галкина Анастасия, Ковальчук Иван, Мурзина Евгения, Печникова Арина и Турков Иван, Владимирская обл. г. Струнино, школа № 11, учитель **Волков Ю.П.**;

— Брагин Алексей, Ворошилов Антон и Пусь Иван, г. Пенза, школа № 73, учитель **Диков А.В.**;

— Еремеев Макар и Кравченко Наталья, средняя школа села Горелово Тамбовской обл., учитель **Шитова Л.А.**;

— Захарова Ксения и Захарова Эльвина, Республика Татарстан, Мамадышский р-н, совхоз “Мамадышский”, политехнический колледж, преподаватель **Порываева Н.С.**;

— Курников Виктор, средняя школа поселка Осиновка, Алтайский край, учитель **Евдокимова А.И.**;

— Лопатников Антон и Толчинский Николай, Москва, школа № 1530 «Школа Ломоносова», учитель **Каменецкая Т.С.**

Спасибо всем!

Подсчёт количества треугольников

Во многих источниках представлены задачи на определение общего количества треугольников разного размера в фигурах, аналогичных показанной на рис. 1⁷.

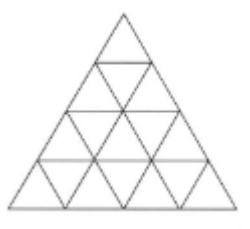


Рис. 1. Треугольник из треугольников

Я задумался над тем, а нельзя ли решить задачу, не подсчитывая треугольники на изображении, а на основе рассуждений и, возможно, с использованием формул, и решил исследовать этот вопрос. Результаты своей работы представляю в данной статье.

Виды треугольников

Будем разделять все треугольники:

- 1) по размеру;
- 2) по ориентации:
 - треугольники вершиной вверх;
 - треугольники вершиной вниз.

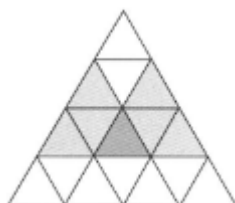


Рис. 2. Некоторые перекрывающиеся треугольники вершиной вверх с длиной стороны 2

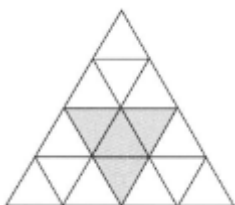


Рис. 3. Треугольник вершиной вниз с длиной стороны 2

Количество рядов треугольников со сторонами длиной 1 в исследуемой фигуре будем называть «степень фигуры» и обозначать это значение n .

⁷ Интересно, какой ответ вы получили?

Несколько частных случаев

Подсчитаем количество треугольников разных размеров и разной ориентации:

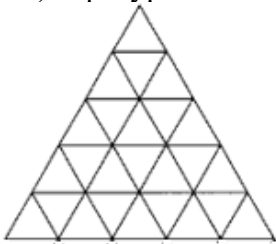
1) в фигуре степени 4 (см. рис. 1):

Таблица 1

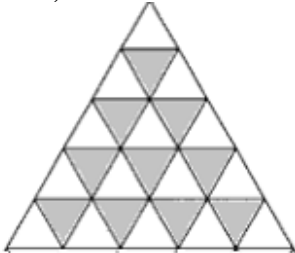
Длина стороны	Количество треугольников	
	вершиной вверх	вершиной вниз
1	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$1 + 2 + 3 = 6$
2	$1 + 2 + 3 = 6$	1
3	$1 + 2 = 3$	
4	1	
Всего	20	7

Обратим внимание на значения 6 и 1 в двух последних столбцах таблицы.

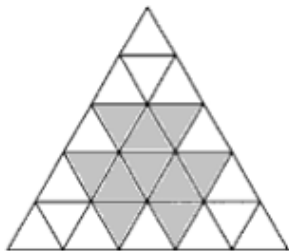
2) в фигуре степени 5 (см. рис. 4а):



а)



б)



в)

Рис. 4. Фигура степени 5 и некоторые виды треугольников

Таблица 2

Длина стороны	Количество треугольников	
	вершиной вверх	вершиной вниз
1	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
2	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 2 + 3 = 6$	
4	$1 + 2 = 3$	
5	1	
Всего	35	13

Здесь обратите внимание на значения 10 и 3 в двух последних столбцах таблицы.

3) в фигуре степени 6 (см. рис. 5)

Таблица 3

Размер треугольников	Количество треугольников	
	вершиной вверх	вершиной вниз
1	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
2	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$1 + 2 + 3 = 6$
3	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	1
4	$1 + 2 + 3 = 6$	
5	$1 + 2 = 3$	
6	1	
Всего	56	22

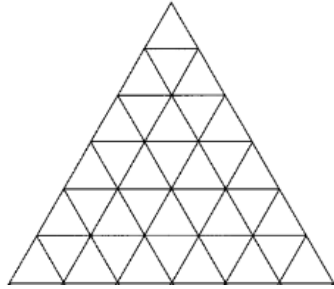


Рис. 5. Фигура степени 6

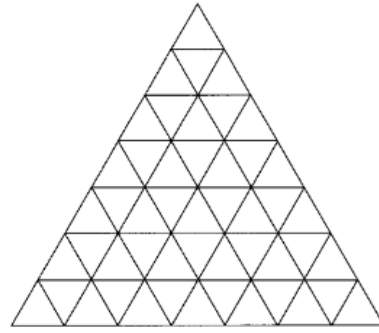


Рис. 6. Фигура степени 7

4) в фигуре степени 7 (см. рис. 6)

Таблица 4

Размер треугольников	Количество треугольников	
	вершиной вверх	вершиной вниз
1	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
2	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
3	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$1 + 2 = 3$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	
5	$1 + 2 + 3 = 6$	
6	$1 + 2 = 3$	
7	1	
Всего	84	34

Анализ примеров

Зависимость количества суммируемых чисел в строках среднего столбца полученных таблиц от размера треугольников l и степенью фигуры n показана в табл. 5:

Таблица 5

Размер треугольников, l	Количество чисел, k
1	n
2	$n - 1$
3	$n - 2$
...	...
$n - 1$	2
$n - 2$	1

Анализ последней таблицы показывает, что количество суммируемых чисел k зависит от размера треугольника l и степени фигуры n следующим образом:

$$k = n - (l - 1) \quad (*)$$

Далее, так как последовательность $1, 2, 3, \dots$, представляет из себя арифметическую прогрессию с первым членом, равным 1, и разностью, равной 1, то сумма k членов этой прогрессии равна

$$\frac{k(k+1)}{2} \quad (**)$$

Формула (**) позволяет легко определить количество треугольников вершиной вверх для фигуры степени 8:

Таблица 6

Размер треугольников	Количество чисел	Количество треугольников вершиной вверх
1	8	$\frac{8 \times 9}{2} = 36$
2	7	$\frac{7 \times 8}{2} = 28$
3	6	$\frac{6 \times 7}{2} = 21$
4	5	$\frac{5 \times 6}{2} = 15$
5	4	$\frac{4 \times 5}{2} = 10$
6	3	$\frac{3 \times 4}{2} = 6$
7	2	$\frac{2 \times 3}{2} = 3$
8	1	$\frac{1 \times 2}{2} = 1$
Всего		120

Теперь – о количестве треугольников того или иного размера вершиной вниз. Анализ таблиц 1–4 показывает, что эти количества связаны со значениям в среднем столбце (в таблицах «связанные» числа отненены). Как именно? Для ответа составим таблицу:

Таблица 7

Номер строки в последнем столбце	Используется значение из строки в среднем столбце
1	2
2	4
3	6
...	...

Количество значений в последнем столбце равно целочисленному частному от деления степени фигуры n на 2.

Автоматизация расчётов

Для расчётов можно использовать программу Microsoft Excel (или аналогичную программу – электронную таблицу)

Учитывая проведённый анализ, можно для определения общего количества треугольников в фигуре степени 8 оформить лист программы Microsoft Excel следующим образом:

	А	В	С	Д
1			Количество треугольников	
2	Размер треугольника	Кол-во чисел, k	вершиной вверх	вершиной вниз
3	1	8		
4	2	7		
5	3	6		
6	4	5		
7	5	4		
8	6	3		
9	7	2		
10	8	1		
11		Всего		
12			ИТОГО	

В ячейку В3 вводится формула (*): $=8 - (A3 - 1)$, в ячейку С3: $=B3*(B3+1)/2$. Обе формулы копируются в остальные ячейки строк 4–8.

Сложнее с формулами в столбце D.

Анализ таблиц 1–4 и 7 показывает, что в этом столбце:

- значение в строке 3 равно значению в строке 4 столбца С;
- значение в строке 4 равно значению в строке 6 столбца С;
- значение в строке 5 равно значению в строке 8 столбца С;
- значение в строке 6 равно значению в строке 10 столбца С.

а количество строк с ненулевыми значениями равно целой части частного от деления степени исследуемой фигуры на 2.

В ячейки С11, D11 и D11 вводятся формулы для расчёта общего количества треугольников

Результаты расчётов:

	А	В	С	Д
1			Количество треугольников	
2	Размер треугольников	Кол-во чисел, k	вершиной вверх	вершиной вниз
3	1	8	36	28
4	2	7	28	15
5	3	6	21	6
6	4	5	15	1
7	5	4	10	
8	6	3	6	
9	7	2	3	
10	8	1	1	
11			120	50
12			ИТОГО	170

Недостатком использования электронных таблиц является то, что для каждого значения степени фигуры n нужно оформлять отдельный лист. Этот недостаток устраняется при использовании программы. Опишу соответствующую программу на школьном алгоритмическом языке (система программирования КуМир).

В ней для хранения количества треугольников разного размера использованы два массива из 100 элементов (для треугольников вершиной вверх и треугольников вершиной вниз). Общее количества треугольников двух видов хранят переменные `всего_вв` и `всего_вн`.

Итак, программа:

```

алг подсчёт_количества_треугольников
нач цел таб кол_вв[1:100], кол_вн[1:100], цел n, всего_вв,
всего_вн, k, i
  | Ввод фактической степени фигуры
  ввод n
  | Подсчет треугольников с вершиной вверх
  всего_вв := 0
  нц для i от 1 до n
    k := n - i + 1 | Формула (*)
    кол_вв[i] := div(k * (k + 1), 2) | Формула (**)
    всего_вв := всего_вв + кол_вв[i] | Учёт очередного количества
  кц
  | Подсчет треугольников с вершиной вниз
  всего_вн := 0

```

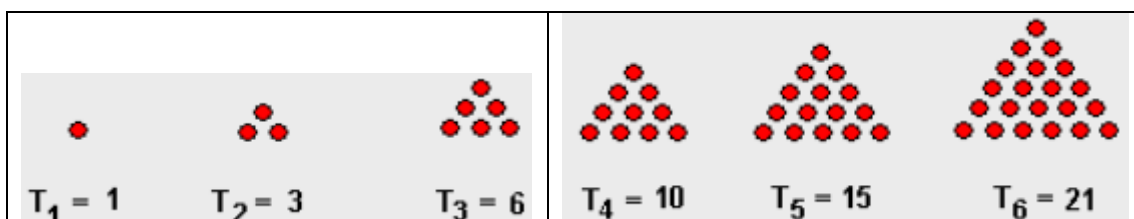
```

нц для i от 1 до div(n, 2)
  | Используются соответствующие значения из массива кол_вв
  кол_вн[i] := кол_вв[2 * i]
  всего_вн := всего_вн + кол_вн[i]
кц
  | Вывод общего числа треугольников
вывод нс, всего_вв + всего_вн
кон

```

Аналитическое решение

Все значения количества треугольников вершиной вверх в таблицах 1–4 (1, 3, 6, ...) представляют собой так называемые «треугольные числа», то есть числа, определяемые как число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника [2]:



Сумма n первых треугольных чисел может быть определена по формуле $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ [1].

С общим числом треугольников вершиной вниз со стороной сложнее. Но и здесь при расчётах помогут треугольные числа. Правда, придётся рассмотреть два варианта чётности степени фигуры n .

1. n – чётное число

Вспомнив таблицы 1 и 3, можем сказать, что:

– при $n = 4$ надо просуммировать два треугольных числа с номерами 1 и 3:

Количество треугольников	
вершиной вверх	вершиной вниз
10	$1 + 2 + 3 = 6$
$6 = 1 + 2 + 3 = T_3$	1
3	
$1 = T_1$	

– при $n = 6$ надо просуммировать три треугольных числа с номерами 1, 3 и 5.

Количество треугольников	
вершиной вверх	вершиной вниз
21	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = T_5$	$1 + 2 + 3 = 6$
10	1
$6 = 1 + 2 + 3 = T_3$	
3	
$1 = T_1$	

В общем случае при чётном n надо просуммировать $\frac{n}{2}$ треугольных чисел:

Порядковый номер	Число
1	T_1
2	T_3
3	T_5
...	...
i	T_{2i-1}

...	...
$\frac{n}{2}$	$n - 1$

то есть найти сумму $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} T_{2i-1}$

Так как согласно (**) $(2i - 1)$ -е треугольное число равно $\frac{(2i-1)2i}{2}$, то эта сумма определяется так:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(2i-1)2i}{2} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i^2 - 1) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i^2) - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 1 \quad (***)$$

В выражении (***) уменьшаемое – это удвоенная сумма квадратов всех чисел от 1 до $\frac{n}{2}$. Для расчётов такой суммы имеется формула (см., например, [2]).

$$\frac{a \times (a + 1) \times (2a + 1)}{6}$$

где a – количество суммируемых квадратов.

Вычитаемое в выражении (***) – это сумма всех чисел от 1 до $\frac{n}{2}$. Согласно (**), она равна $\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2}$.

$$\text{Учитывая это, выражение (***) равно: } 2 \times \frac{\frac{n}{2} \times (\frac{n}{2} + 1) \times (2 \times \frac{n}{2} + 1)}{6} - \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)}{2} = \frac{n(n+2)(n+1)}{12} - \frac{n(n+2)}{8} =$$

$$\frac{2n(n+2)(n+1)}{24} - \frac{3n(n+2)}{24} = \frac{n(n+2)(2n+2-3)}{24} = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}.$$

Итак, общее число треугольников обеих ориентаций в фигуре чётной степени n равно:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} = \frac{4n(n+1)(n+2)}{24} + \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} = \frac{n(n+2)(6n+3)}{24}$$

2. n – нечётное число

Вспомнив таблицы 2 и 4, можем сказать, что:

– при $n = 5$ надо просуммировать два треугольных числа с номерами 2 и 4:

Количество треугольников	
«вершиной вверх»	«вершиной вниз»
15	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4 = T_4$	$1 + 2 = 3$
6	
$3 = 1 + 2 = T_2$	
1	

– при $n = 7$ надо просуммировать три треугольных числа с номерами 2, 4 и 6:

Количество треугольников	
вершиной вверх	вершиной вниз
28	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = T_6$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
15	$1 + 2 = 3$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4 = T_4$	
6	
$3 = 1 + 2 = T_2$	
1	

В общем случае при чётном n надо просуммировать $\frac{n-1}{2}$ треугольных чисел:

Порядковый номер	Число
1	T_2
2	T_4
3	T_6
...	...
i	T_{2i}
...	...
$\frac{n}{2}$	n

то есть найти сумму $\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} T_{2i}$.

Проведя расчёты аналогично проведённым для чётного n , получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2i(2i+1)}{2} &= \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i(2i+1) = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2i^2 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i = 2 \times \frac{\frac{n-1}{2} \times (\frac{n-1}{2} + 1) \times (2 \times \frac{n-1}{2} + 1)}{6} + \frac{\frac{n-1}{2} \times (\frac{n-1}{2} + 1)}{2} = \\ &= \frac{(n-1)(n+1)n}{12} + \frac{(n-1)(n+1)}{8} = \frac{2(n-1)(n+1)n}{24} + \frac{3(n-1)(n+1)}{24} = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}. \end{aligned}$$

Это значит, что общее число треугольников обеих ориентаций в фигуре нечётной степени n равно:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} = \frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8}$$

По двум полученным формулами можно определить: при $n = 10$ общее количество треугольников равно 315, при $n = 25$ – 4303.

Предлагаю читателям-школьникам определить искомые значения для фигур степеней от 4 до 25 и представить полученные данные графически (используя программу Microsoft Excel или аналогичную).

Выражаю благодарность Дмитрию Михайловичу Златопольскому за помощь в проведении исследования и в подготовке данной статьи.

Использованные источники

1. Треугольное число. https://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольное_число

2. Формула суммы квадратов натуральных чисел. Доказательство. <https://arhiuch.ru/formula-summy-kvadratov-natural-nykh-chisel-dokazatelstvo>

Наше пожелание выпускникам:

